Zur Einführung der Vektorrechnung in der Schule

Eduard Cejnek, Wien

Seit etwa 20 Jahren wird Vektorrechnung in den österreichischen höheren Schulen unterrichtet, die Lehrpläne verlangen es.

Meist werden Vektoren als sogenannte Pfeilklassen (Äquivalenzklassen gerichteter Strecken mit gleicher Richtung und gleicher Länge) eingeführt. Die Pfeilklassen werden aber praktisch nur zur Einführung des Vektorbegriffs verwendet, bei den Anwendungen der Vektorrechnung werden fast ausschließlich nur mehr einzelne Pfeile als sogenannte Repräsentanten der Pfeilklassen verwendet.

Ich möchte in diesem Referat einen anderen Weg aufzeigen, wie man Vektoren in der Oberstufe der höheren Schule einführen und mit ihnen arbeiten kann. Vor diesem konkreten didaktischen Vorschlag erlaube ich mir, einige Bemerkungen voranzustellen, da ein konkreter Vorschlag besser motoviert erscheint, wenn er in einem allgemeineren Zusammenhang gesehen wird.

1) Warum unterrichten wir Vektorrechnung?

Als Anwort auf diese Frage kann man zunächst innermathematische Begründungen anführen.

a) Die Vektorrechnung ist ein brauchbares Hilfsmittel, um analytische Geometrie betreiben zu können.

b) Mit Hilfe der Vektorrechnung können geometrische Sätze bewiesen werden.

c) Die Vektorrechnung stellt eine Begriffserweiterung dar. (Das Rechnen in der Menge R wird erweitert auf das Rechnen in R^2 bzw. R^3.)

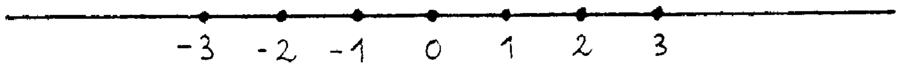
d) Tatsachen, die durch mehr als eine Zahl beschrieben werden, können übersichtlich und abgekürzt dargestellt werden. Man denke nur an die ein- und mehrdimensionalen Felder in der EDV.

Als Begründung für den Unterricht in Vektorrechnung erscheint mir die Angabe von Aktivitäten innerhalb der Vektorrechnung, durch die man sogenannte höhere (fächerübergreifende und fachspezifische) Lernziele erreichen kann, notwendig.

Die Behandlung dieser Frage würde jedoch den Zeitrahmen dieses Vortrags sprengen, obwohl sie grundsätzlich wichtig wäre.

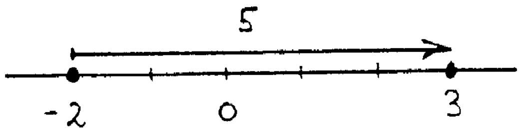
2) Vorkenntnisse aus der Unterstufe

a) Die Zahlengerade



Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt der Zahlengeraden und jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht eine reelle Zahl. Zur Darstellung der reellen Zahlen und zur Veranschaulichung der Kleiner-Ordnung erscheint mir die Pfeildarstellung der Zahlen überflüssig zu sein. Erst wenn man Rechenoperationen veranschaulichen will, wird die Pfeildarstellung zweckmässig.

Zahl		Zahl		Zahl
=		=		=
(-2)	+	5	=	3
↓		↓		↓
Punkt		Pfeil		Punkt

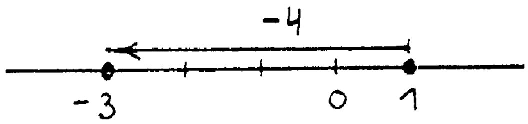


(Vergleich: 1. Summand: Kontostand, 2. Summand: Veränderung des Kontostandes, Summe: Neuer Kontostand)

Die Subtraktion wird auf die Addition zurückgeführt:

$1 - 4 = -3$

$1 + (-4) = -3$



b) Translation

b_1) Gleichgerichtete, gleichlange Pfeile als Bahnen von Punkten bei Auffassung als (physikalische) Verschiebung. (In der Physik ist der Begriff Translation allgemeiner, nämlich als Bewegung, bei der alle Punkte eines Körpers kongruente Bahnen beschreiben.)

b_2) Pfeile sind nur Konstruktionslinien, um aus den Originalpunkten die Bildpunkte zu finden bei Auffassung der Translation als geometrische Abbildung.

Mir erscheint es nicht notwendig, den Begriff des Vektors (als Pfeilklasse) hier einzuführen. An dieser Stelle ist er nur ein neuer Name, mit dem nichts weiter angefangen wird. Außerdem wird dadurch der Vektorbegriff bereits in eine bestimmte (geometrische) Richtung gelenkt und bleibt nicht offen für die Behandlung in der Oberstufe.

3) Was ist ein Vektor?

Nach der üblichen heutigen Auffassung ist ein Vektor ein Element eines (reellen) Vektorraums. Als abstrakte mathematische Struktur scheint der Vektorraumbegriff als Einstieg in die Vektorrechnung für die Schule didaktisch nicht geeignet zu sein. Man sollte ein konkretes Modell (oder bei Bedarf mehrere Modelle) eines Vektorraums vorstellen und damit arbeiten. Allenfalls könnte man am Ende des Lehrgangs als abstrakte Verallgemeinerung der behandelten Modelle die Struktur Vektorraum definieren. Beispiele für reelle Vektorräume:

$\{$Polynome vom Grad $\leqq n\}$, $\{f: [a,b] \rightarrow R\}$
$\{f: [a,b] \rightarrow R$, f integrierbar$\}$, $\{f: [a,b] \rightarrow R$, f stetig$\}$
$\{f: [a,b] \rightarrow R$, f differenzierbar$\}$, $\{$Zahlenfolgen $\langle a_n \rangle\}$
$\{$Matrizen vom Typ $(m,n)\}$, $\{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2 \in R\}$
$\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in R\}$, $\{$Translationen$\}$
$\{$Pfeile, die einen gemeinsamen Anfangspunkt haben$\}$
$\{$Pfeilklassen$\}$, $\{$Punkte eines zentrierten Raumes$\}$

Welche konkreten Modelle bieten sich zur Behandlung in der Schule an?

a) Geometrische Modelle

a_1) Menge aller Pfeile der Ebene (des Raumes) mit gemeinsamem Anfangspunkt. Z.B. Menge aller Ursprungspfeile = Ortsvektoren.

(Vektor ist hier ein Pfeil mit gegebenem Anfangspunkt.)

a_2) Menge aller Pfeilklassen der Ebene (des Raumes). Dabei besteht eine Pfeilklasse aus allen gleichgerichteten, gleichlangen Pfeilen.

(Vektor ist hier eine Pfeilklasse.)

a_3) Menge aller Translationen der Ebene (des Raumes).

(Vektor ist hier eine Funktion.)

b) Algebraische Modelle

Menge aller Zahlenpaare = R^2 bzw. Menge aller Zahlentripel = R^3

Genügt nicht ein einziges Modell?
Üblicherweise wird mindestens ein geometrisches und ein algebraisches Modell verwendet, um analytische Geometrie betreiben zu können (Lösen von geometrischen Problemen auf algebraischem Weg), aber auch um algebraische Probleme geometrisch behandeln zu können (z.B. Lösungsmöglichkeiten eines Gleichungssystems zu studieren).

Dabei kann der Standpunkt eingenommen werden, daß man zuerst ein Modell (geometrisch oder algebraisch) vollkommen vorstellt und dann erst das entsprechende andere Modell (algebraisch oder geometrisch) einführt.
Man kann aber auch möglichst bald nach Einführung des ersten Modells ein zweites vorstellen und ihre einander entsprechenden Gesetzmäßigkeiten nebeneinander behandeln.

a) Zuerst Einführung eines geometrischen Modells (z.B. Pfeilklassen) und dann nach Einführung von Basisvektoren oder eines Koordinatensystems ein algebraisches Modell.

   Gewisser Vorteil: Anschaulichkeit, falls man nur einzelne Pfeile als Repräsentanten der Pfeilklassen betrachtet.

   Nachteile: Aneinanderhängen von Pfeilen bzw. Streckung von Pfeilen wird keineswegs intuitiv als "Addition" bzw. "Multiplikation mit einer reellen Zahl" aufgefaßt. Bei jedem Gesetz ist bei seinem Nachweis die Unabhängigkeit von der Auswahl des Repräsentanten zu zeigen. Äquivalenzklassenbildung erscheint zunächst etwa gekünstelt. Sie könnte als für einen Vektor charakteristisch angesehen werden.

b) Zuerst ein algebraisches Modell (Zahlenpaare, Zahlentripel), dann ein geometrisches Modell nach Einführung eines Koordinatensystems.

   Vorteile: Anschluß an die Unterstufe: Rechenoperationen und Rechengesetze sind weitgehend denen von reellen Zahlen gleich. Motivation für die Bezeichnung "Addition" und "Multiplikation mit einer reellen Zahl" ergeben sich fast von selbst.

Äquivalenzklassenbildung beim geometrischen Modell erscheint jetzt natürlicher, da alle Pfeile, die einem bestimmten Zahlenpaar (Zahlentripel) entsprechen, zu einer Klasse zusammengefaßt werden.

Unabhängig von der Reihenfolge der Einführung der Vektorraummodelle sehe ich einige grundsätzliche Nachteile des Pfeilklassenmodells:

1) In der analytischen Geometrie (Hauptanwendungsgebiet) wird mit Zahlenpaaren bzw. Zahlentripeln gerechnet.

2) Die Vorstellung Vektor = Pfeilklasse ist unnatürlich, eher die Vorstellung Vektor = Pfeil. Man spricht vom Ortspfeil eines Punktes, von Richtungspfeilen einer Geraden. Auch in der Physik treten Vektoren fast immer als Pfeile auf.

3) Pfeilklassen werden nicht addiert bzw. mit reellen Zahlen multipliziert. Es werden nur Pfeile "aneinandergehängt" bzw. "gestreckt".

4) Beim Skalarprodukt erscheint die Pfeilklassenvorstellung völlig inadäquat.

Vorstellung eines didaktischen Konzepts zur Einführung der Vektorrechnung

Zunächst werden Zahlenpaare (Zahlentripel) eingeführt und gezeigt, daß man mit ihnen rechnen kann. Damit wäre ein Modell für einen Vektorraum vorgestellt und man ist berechtigt, von Vektoren zu sprechen.

Meist werden mit dem Vektorbegriff auch geometrische Vorstellungen verbunden. Die Zahlenpaare (Tripel) werden zweifach geometrisch gedeutet, damit bei Anwendungen die jeweils günstigere Deutung verwendet werden kann.

Die Rechenoperationen werden ebenfalls anschaulich gedeutet, aber nicht geometrisch definiert.

Damit ist das Betreiben von analytischer Geometrie möglich. Dabei wird nur <u>ein</u> Vektorraummodell vorgestellt. Der Begriff Vektor bleibt immer ein algebraischer Begriff, auch wenn er anschaulich dargestellt wird.

Die Zusammenfassung von Pfeilen, die dasselbe Zahlenpaar darstellen, unterbleibt, da sie nicht notwendig ist. Sie wäre nur notwendig, wenn man beweisen wollte, daß die Pfeilklassen einen Vektorraum bilden. Ebenso wichtig wäre aber der Vektorraum der Ursprungspfeile.

Motivation für die Einführung von Zahlenpaaren bzw. Zahlentripel:
Tatsachen, die durch zwei oder drei Zahlen dargestellt werden. Z.B. Blutdruck (150/90), Einkauf einer Ware (Menge, Preis pro Mengeneinheit), Charakterisierung eines Trabrennpferdes (Alter, bisherige Gewinnsumme, Höchstleistung)

Verkauf von Sportpreisen einer Firma im Jahr 1982
(in 1000 S)

Quartal / Warenart	1.	2.	3.	4.
Pokale	652	581	473	610
Medaillen	143	126	118	192
Urkunden	25	28	35	42

Quartalsweise zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix}652\\143\\25\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}581\\126\\28\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}473\\118\\35\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}610\\192\\42\end{pmatrix}$$

Rechnen mit Zahlenpaaren

Addition von Zahlenpaaren:

Motivation durch ein Anwendungsbeispiel, etwa die Halbjahreseinnahmen der Sportpreisfirma.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$$

Um die Rechengesetze für die Addition von Zahlenpaaren kurz formulieren zu können, führen wir als Bezeichnung von Zahlenpaaren Großbuchstaben A, B, C, ... ein.

Gesetze der Addition von Zahlenpaaren

(Sätze, die man durch Zurückführen auf die Grundgesetze des Rechnens mit reellen Zahlen beweisen kann.)

$\forall A,B \in R^2$: $\quad A + B = B + A$

$\forall A,B,C \in R^2$: $\quad (A+B) + C = A + (B+C)$

$\exists\, \Theta \in R^2$, sodaß $\forall A \in R^2$: $\quad A + \Theta = A$

$\forall A \in R^2$ gibt es ein $A^* \in R^2$: $\quad A + A^* = \Theta$

$\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Bezeichnung: $A^{*} = - A$, $\quad -A = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$

Es gelten also praktisch gleiche Gesetze wie bei der Addition reeller Zahlen.

Zum Einüben der Rechengesetze mit Zahlenpaaren: Umformen von Zahlenpaarausdrücken, dadurch Vereinfachung des Ausdrucks und anschließendes Berechnen durch Einsetzen gegebener Zahlenpaare. Lösen von Zahlenpaargleichungen mit unbekannten Zahlenpaaren.

<u>Multiplikation</u> einer reellen Zahl mit einem Zahlenpaar:

Motivation: Eine Preisliste um 15 % reduzieren, d.h. jeden Preis mit 0,85 multiplizieren.

Definition: $\quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\quad k \circ A = \begin{pmatrix} k \circ a_1 \\ k \circ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad k \in R$

<u>Gesetze der Multiplikation</u>

$\forall k, l \in R, \quad \forall A, B \in R^2$:

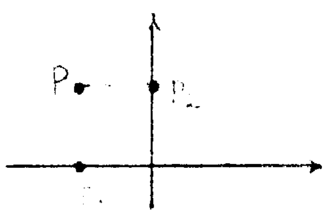
$$k \cdot (A+B) = k \circ A + k \circ B$$
$$(k+l) \circ A = k \cdot A + l \cdot A$$
$$(k \cdot l) \circ A = k \circ (l \circ A)$$
$$1 \circ A = A$$

Hinweis: Da damit die Vektorraumstruktur des R^2 gezeigt ist, könnte man hier bereits den Begriff Vektor einführen. Besser jedoch erst nach den Veranschaulichungen.

<u>Veranschaulichung der Zahlenpaare des R^2</u>

Nach Einführung eines cartesischen Koordinatensystems:

a) <u>Veranschaulichung als Punkt</u>



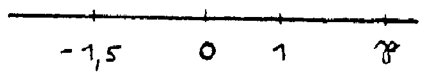
$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \rightarrow P \text{ (eindeutig)} \\ P \rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ (eindeutig)} \end{array}\right\} \quad P \longleftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

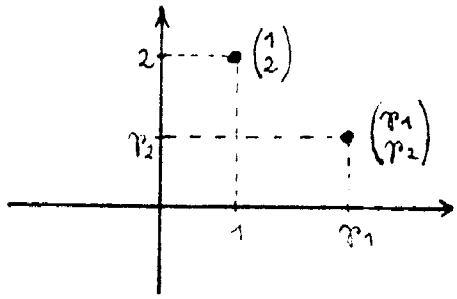
Zwischen den Zahlenpaaren des R^2 und den Punkten der Ebene wird eine bijektive Zuordnung dadurch hergestellt.

Wir bezeichnen Zahlenpaare mit denselben Buchstaben, mit denen die Punkte bezeichnet werden, die die Zahlenpaare veranschaulichen.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Genauso wie wir auf der Zahlengeraden zu den einzelnen Punkten jene Zahlen schreiben, die ihnen entsprechen, können wir jetzt zu den Punkten der Ebene jene Zahlenpaare (oder deren Bezeichnung) schreiben, die den Punkten entsprechen.

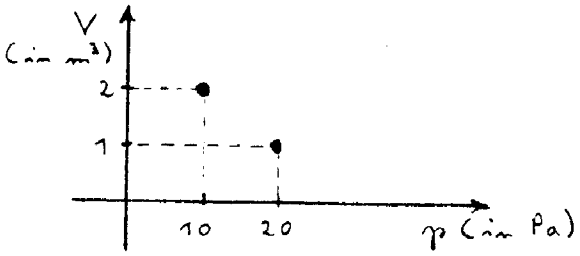




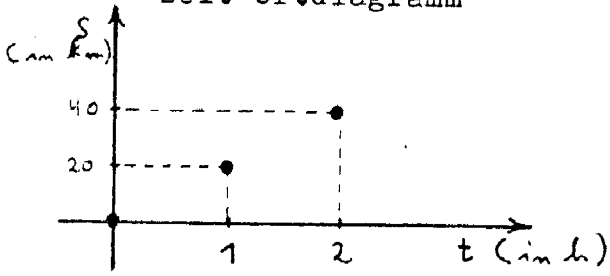
b) <u>Veranschaulichung als Pfeil</u>

Mit Punkten kann man <u>Zustände</u> veranschaulichen:

pV-Diagramm



Zeit-Ortdiagramm



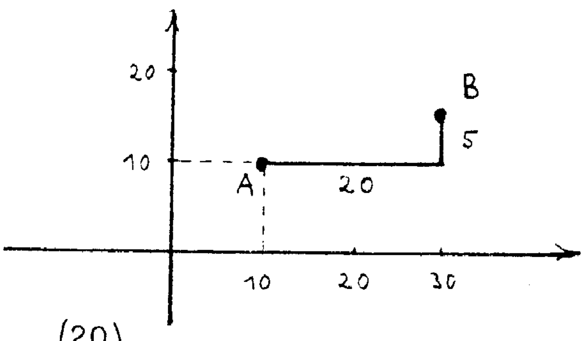
Zahlenpaare können aber auch <u>Zustandsänderungen</u> beschreiben:

Z.B.

$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ stellt einen "Zustand" (etwa einen Lagerbestand) dar.

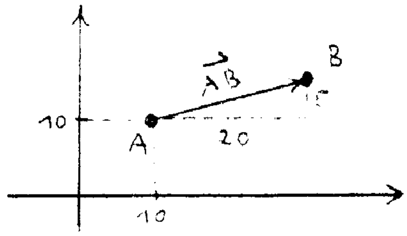
$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ gibt die Veränderung dieses Zustandes an.

Veranschaulichung:



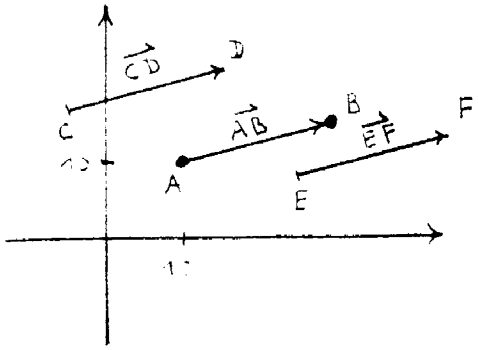
Durch die Veränderung $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ erhält man einen neuen Zustand, der durch den Punkt B charakterisiert wird. Die Veranschaulichung der Veränderung vom Zustand A zum Zustand B ist eine Strecke von A nach B (Pfeil mit Anfangspunkt A und Endpunkt B).

Bezeichnung: $\overrightarrow{AB}$



Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ist eine Veranschaulichung des Zahlenpaares $\binom{20}{5}$.

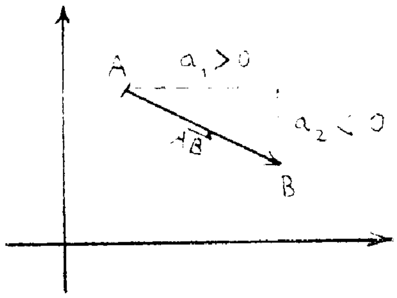
Diese Veranschaulichung ist jedoch nicht eindeutig, da die, durch das Zahlenpaar dargestellte Veränderung einen anderen Ausgangszustand haben kann.



Dem Zahlenpaar $\binom{20}{5}$ entsprechen unendlich viele Pfeile, die gleich lang sind und die gleiche Richtung haben.

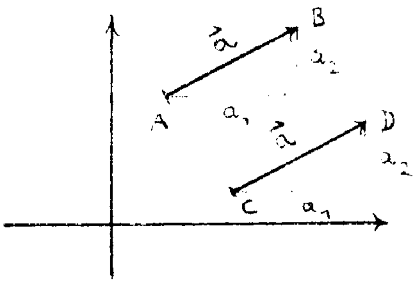
Umkehrung:

$\overrightarrow{AB} \rightarrow \binom{a_1}{a_2}$ (eindeutig)



Zahlenpaare, mit denen die vorhin erwähnten Rechenoperationen ausführbar sind und die auf die beschriebene Weise veranschaulicht werden können, nennen wir V E K T O R E N .

Pfeile, die dasselbe Zahlenpaar veranschaulichen (also gleichgerichtet und gleich lang sind), kann man gleich bezeichnen.



$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$

$\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$

Warum drei verschiedene Bezeichnungen für Vektoren?

$A = \binom{a_1}{a_2}$ $\quad \overrightarrow{AB} = \binom{a_1}{a_2}$ $\quad \vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$

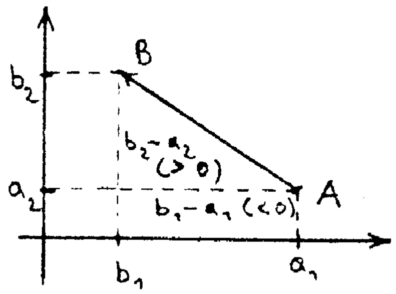
Damit bringen wir zum Ausdruck, wie wir ihn veranschaulichen wollen: als Punkt, als Pfeil von A nach B, als Pfeil mit beliebigem Anfangspunkt.

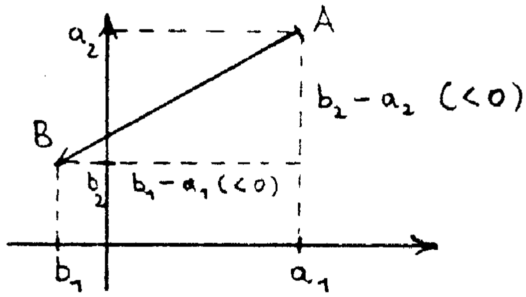
Diese Vorgangsweise ist gar nicht so unüblich, so werden z.B. reelle Zahlen mit Großbuchstaben, Kleinbuchstaben oder griechischen Buchstaben bezeichnet, je nachdem ob man einen Flächeninhalt, eine Streckenlänge oder ein Winkelmaß meint. Es werden sogar in ein und derselben Formel verschiedene Bezeichnungen für reelle Zahlen verwendet.

Z.B. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ (a, b, α, β sind reelle Zahlen)

Zusammenfassend:
Vektoren können durch Punkte und durch Pfeile veranschaulicht werden.

Die Grundaufgabe für die analytische Geometrie lautet:
Wie berechnet man $\overrightarrow{AB}$ aus A und B ?





Unabhängig von der Richtung des Pfeiles gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = B - A$$

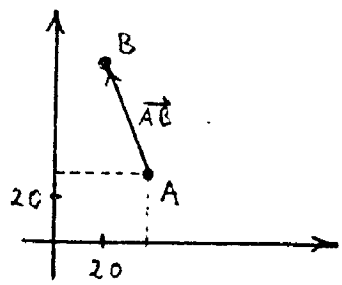
in Worten: Das dem Pfeil $\overrightarrow{AB}$ zugeordnete Zahlenpaar erhält man als Differenz der den Punkten B und A zugeordneten Zahlenpaaren. (Kurz:"Spitze minus Schaft")

a) "Punkt-Pfeildeutung der Addition"

Aus $\overrightarrow{AB} = B - A$ folgt $A + \overrightarrow{AB} = B$

Daraus erkennt man, daß bei einer Addition von Vektoren der erste Summand als Punkt, der zweite Summand als Pfeil und die Summe als Punkt gedeutet werden kann.

Z.B. $\underset{A}{\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}} + \underset{\overrightarrow{AB}}{\begin{pmatrix} -20 \\ 50 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 20 \\ 80 \end{pmatrix}}$

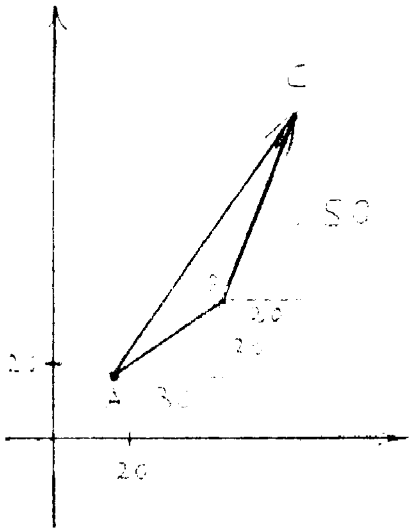


Diese Veranschaulichung stellt eine Verallgemeinerung der Punkt-Pfeildeutung der Addition von reellen Zahlen auf der Zahlengeraden dar.

Hinweis: Es wird hier keinesfalls Verschiedenes addiert, denn es werden nur Zahlenpaare addiert, diese allerdings verschieden veranschaulicht. Wenn man etwa das Intervall $[a - \varepsilon \;, a + \varepsilon]$ veranschaulicht, so wird üblicherweise a als Punkt auf der Zahlengeraden, ε jedoch als gerichtete Strecke auf der Zahlengeraden gedeutet.

b) <u>"Pfeil-Pfeildeutung der Addition"</u>

$$\text{z.B.}\quad \underset{\overrightarrow{AB}}{\begin{pmatrix}30\\20\end{pmatrix}} + \underset{\overrightarrow{BC}}{\begin{pmatrix}20\\50\end{pmatrix}} = \underset{?}{\begin{pmatrix}50\\70\end{pmatrix}}$$



Wir gehen von einem beliebigen Zustand A aus, fassen den ersten Summanden als Zustandsänderung (Pfeildeutung) auf, sodaß sich der Zustand B ergibt. Dieser Zustand B wird durch den zweiten Summanden ebenso verändert, sodaß man schließlich den Zustand C erhält.

$$\overrightarrow{AB} = B - A \qquad \overrightarrow{BC} = C - B$$

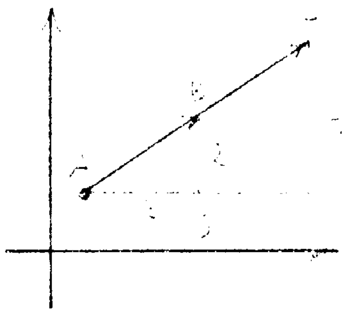
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Werden die beiden Summanden als Pfeile gedeutet, so ist die Summe ebenfalls als Pfeil zu deuten, ("Aneinanderhängen von Pfeilen")

c) <u>Veranschaulichung der Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor</u>

$$\text{z.B.}\quad 2 \cdot \underset{\overrightarrow{AB}}{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}} = \underset{?}{\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}}$$



Wir fassen $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ als Veränderung, etwa als Stückzahlvektor eines Verkaufes auf. (Pfeildarstellung)

$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ stellt dann, vom selben Lagerbestand (= Zustand) ausgehend, eine zweimal so große Veränderung dar.

2. $\vec{AB} = \vec{AC}$ (Streckung des Pfeiles $\vec{AB}$ mit dem Faktor 2)

Allgemein: $k \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \quad (k \in R)$

Der Pfeil, der $\vec{AC}$ veranschaulicht, ist k mal so lang wie der Pfeil, der $\vec{AB}$ veranschaulicht und je nach Vorzeichen des Streckungsfaktors k gerichtet.

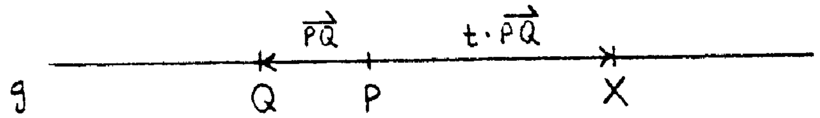
Beispiele zur Anwendung von Vektoren

Um geometrische Probleme lösen zu können, benötigt man nur wenige elementare Strategien:

(1) Aneinanderhängen von Pfeilen
(2) Anhängen von Pfeilen an Punkten
(3) Konstruktion von Teilpfeilen

Diese geometrischen Operationen müssen in Operationen von Zahlenpaaren übersetzt werden und umgekehrt.

1. Beispiel: Wie kann man von einem Punkt einer Geraden alle anderen Punkte dieser Geraden erreichen?



Man muß an den Punkt P den Pfeil $\vec{PX}$ anhängen. (X ein beliebiger Punkt der Geraden) Um $\vec{PX}$ zu erhalten, benötigt man zunächst einen weiteren Pfeil $\vec{PQ}$, der auf der Geraden g liegt. (Richtungspfeil der Geraden) Dazu ein weiterer Punkt Q auf g nötig.

Algebraisiert: $\vec{PX} = t \cdot \vec{PQ} \quad (t \in R)$

X variabel auf g, t variabel in R;
jedem $X \in g$ entspricht ein $t \in R$ und umgekehrt.

$X - P = t \cdot \vec{PQ}$

$\underline{X = P + t \cdot \vec{PQ}}$

(Parameterdarstellung der Geraden g)

Verwendet man als Richtungsvektor nicht einen, dessen Pfeil in P beginnt, sondern einen, der durch einen beliebigen Pfeil auf der Geraden g dargestellt wird, so schreibt man:

$X = P + t \cdot \vec{g}$

Hinweis: Bei der üblichen Darstellung $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{g}$ kann man a) $\vec{x}$, $\vec{p}$ als Ortsvektoren, $\vec{g}$ und damit $t \cdot \vec{g}$ als Pfeilklasse auffassen. (Addition von Elementen verschiedener Vektorräume.)

b) $\vec{x}$, $\vec{p}$ und $\vec{g}$ als Ortsvektoren auffassen.

c) $\vec{x}$, $\vec{p}$ und $\vec{g}$ als Pfeilklassen auffassen.

Die zugehörigen Zeichnungen sind nicht so einfach (besonders in c)) wie die im oben angeführten Beispiel.

2. Beispiel: Beweis der Invarianz der Streckenlänge bei einer Translation ("Längentreue").

Darstellung einer Translation: $X' = X + \vec{a}$
($\vec{a}$: Translationsvektor, X: Originalpunkt, X': Bildpunkt)

$P \rightarrow P' \qquad Q \rightarrow Q'$

Behauptung: $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$

Beweis: $P' = P + \vec{a} \qquad Q' = Q + \vec{a}$

$$\overrightarrow{P'Q'} = Q' - P' = Q + \vec{a} - (P + \vec{a}) = Q - P = \overrightarrow{PQ}$$

$$\Longrightarrow \underline{\overline{PQ} = \overline{P'Q'}}$$

Literaturverzeichnis:

BÜRGER, H.-FISCHER, R. et al.:
Mathematik, Oberstufe 1
Arbeitsbuch für die 5.Klasse der AHS
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1978

BÜRGER, H.-FISCHER, R.-MALLE, G.-REICHEL, H.-C.:
Zur Einführung des Vektorbegriffes:
Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung
Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn 1980